

« Géorigamétrie »

*Une approche sur l'accessibilité de la géométrie pour personnes aveugles.**

Jaime López Krahe

THIM-CHArt (UR-4004), Université Paris 8

RESUME

L'accessibilité de la géométrie pour les personnes aveugles, hors l'aspect formel, peut poser quelques difficultés, en particulier au niveau de l'accessibilité aux figures. Nous proposons ici un accès à partir du pliage du papier. L'axiomatique euclidienne et l'axiomatique de l'origami peuvent être mises en parallèle. Dans le premier cas, avec la règle et le compas, nous pouvons résoudre des problèmes quadratiques dans le plan. L'axiomatique de l'origami nous permet d'aborder, en plus, des questions sans solution avec les méthodes de géométrie classique, qui impliquent des équations cubiques, comme par exemple la trisection d'un angle. Une expérimentation avec des élèves de l'INJA et d'autres personnes aveugles, nous permettra de constater les possibilités offertes par cette méthode qui offre une approche ludique, mais rigoureuse, de ces questions complexes, souvent rébarbatives. Nous pensons que cette dynamique pédagogique puisse permettre une motivation intéressante, impulser la stimulation tactile et faciliter le développement de structures spécifiques de plasticité cérébrale.

L'article est rédigé d'une manière linéaire accessible aux personnes aveugles, les figures sont apportées pour faciliter la compréhension pour les « handicapés de la vision », qui n'ont pas l'habitude de suivre un concept géométrique sans images... Finalement notons que la méthode est particulièrement adaptée dans un contexte d'éducation inclusive.

Mots clés : Accessibilité de la Géométrie. Pédagogie pour aveugles. Axiomatique et pliage du papier. Créativité tactile. Origami.

I. INTRODUCTION

La réalisation de figures par pliage du papier (objets, animaux, plantes...) est un art assez répandu et d'origine très ancienne, probablement depuis l'origine du papier en Chine au deuxième siècle (Vicente Palacios, 2008 [1], Patsy Wang-Iverson et al. 2016 [2]). Deux traditions anciennes semblent être bien ancrées, avec des bases de pliage assez spécifiques, « l'Origami » japonais et la « Papiroflexie » espagnole (Miguel de Unamuno, 1902 [3]), mais il s'est répandu amplement et est devenu assez universel. En France il est largement représenté par le MFPP[4].

Depuis quelque temps, des expériences pédagogiques de réalisation de figures par pliage sont proposées dans les milieux d'enseignement pour des élèves aveugles, comme un outil de développement intellectuel et ludique[5], repris en

France par M Lucas en 2005 dans le cadre du projet Aveuglami [6].

Plus récemment des approches plus mathématiques par R.J. Lang 2011[7] et T. Gotani 2019 [8] ont apporté un formalisme qui a permis le développement d'une « géométrie » du pliage, d'où le titre de « GéOrigamiMétrie », et aussi à visée pédagogique par B. Garrido en 2015 [9] et S Pope en 2010 [10]. C'est à partir de ces développements que nous proposons cette communication.

II. RAPPEL AXIOMATIQUE

La géométrie classique s'appuie sur une axiomatique bien connue qui permet un développement cohérent de la science. En acceptant et s'appuyant sur ces postulats, il est possible de démontrer des théorèmes et construire une science exacte. Nous sommes habitués à y accéder à partir de figures qui facilitent la compréhension des éléments correspondants, mais ceci n'est pas strictement nécessaire.

En géométrie classique ce sont les principes de l'axiomatique euclidienne [11]. Nous considérons connues les notions de point, droite, plan, angle, polygone, congruence, etc. Nous rappelons ici les cinq postulats de base :

Axiome 1 (AE1) : un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts.

Axiome 2 (AE2) : un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.

Axiome 3 (AE3) : étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.

Axiome 4 (AE4) : tous les angles droits sont congruents.

Axiome 5 (AE5) : si deux lignes sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est strictement inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté. (Ou postulat des parallèles, dans la version de Proclus : « *par un point donné, on peut mener une et une seule parallèle à une droite donnée* »).

En particulier la remise en question de ce dernier postulat donne lieu aux géométries non euclidiennes à partir du XIX^e siècle.

Depuis la fin du siècle dernier nous assistons à un développement théorique des techniques du pliage avec une

* Ce papier est dédié à la mémoire de Dominique Asselineau, ingénieur de recherche aveugle, avec qui j'ai travaillé pendant

une vingtaine d'années au Laboratoire Image de l'Ecole National Supérieure des Télécommunications de Paris.

approche mathématique. Ces travaux sont assez divers : géométriques [12], algébriques [13], topologiques, géométrie de l'espace [14, 15], etc. Nous aborderons ici les domaines plus proches de la géométrie qui nous semblent les plus innovants pour l'accessibilité de personnes aveugles.

Rappelons les axiomes de l'origami de Huzita-Justin ou Huzita-Hatori [16, 17, 7]

Axiome 1 (AO1) : Un unique pli passe par deux points p_1 et p_2 spécifiés.

Axiome 2 (AO2) : Un unique pli amène un point p_1 sur un point p_2 .

Axiome 3 (AO3) : Un pli superpose deux droites l_1 et l_2 . [18].

Axiome 4 (AO4) : Un unique pli passe par un point p_1 et est orthogonal à une droite l_2 .

Axiome 5 (AO5) : Soient une droite l_1 et deux points p_1 et p_2 . Lorsque c'est possible, un pli passe par p_2 et amène p_1 sur l_1 .

Axiome 6 (AO6) : Soient deux droites l_1 et l_2 et deux points p_1 et p_2 ; un pli amène p_1 sur l_1 et p_2 sur l_2 .

Il existe un septième axiome (AO7), énoncé par Jacques Justin en 1989 : « Etant donné un point p et deux lignes l_1 et l_2 , il existe un pli unique qui fait coïncider le point p avec l_1 et est perpendiculaire à l_2 » [19].

Il est possible de trouver un parallélisme des cinq premiers axiomes avec l'axiomatique euclidienne, voire des facilités de construction, (par exemple (AO3) nous permet de construire des bissectrices sans avoir à accéder au sommet d'un angle), mais les constructions dérivées de l'axiome 6 (AO6) ne sont pas possibles avec règle et compas (sauf cas particuliers). Ce postulat va nous permettre la résolution d'équations de troisième degré, démontré par J. Justin en 1989 [19] ou résoudre des problèmes comme la trisection d'un angle, comme nous verrons plus loin.

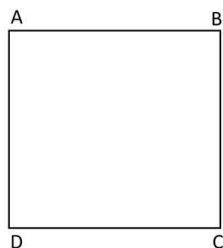
III. QUELQUES APPROCHES PRATIQUES POUR L'EXPERIMENTATION PEDAGOGIQUE

Nous abordons quelques exemples à visée pédagogique qui seront mis en pratique lors de notre expérimentation.

La rédaction sera conçue de manière à rendre accessible le processus de pliage à des personnes aveugles (les images sont présentées pour faciliter l'accès aux personnes qui voient).

Sauf exception, nous partirons d'une feuille carrée de côté unité. Nous disposons de quatre points, les quatre sommets.

Les nommons A, B, C, D, dans le sens des aiguilles d'une montre :

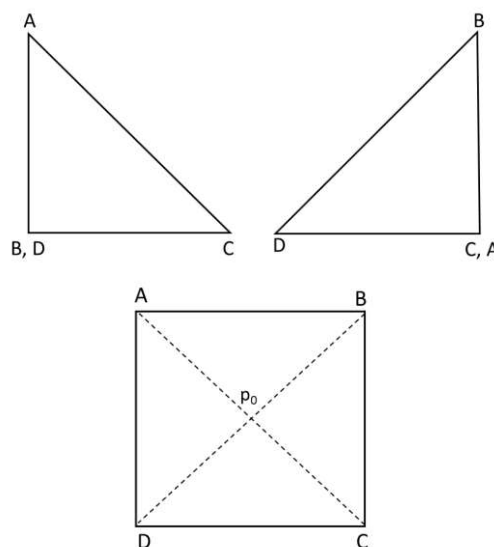


Appliquons le premier axiome (AO1) : « Un unique pli passe par deux points p_1 et p_2 spécifiés ».

Considérons deux sommets opposés AC (ou BD). Le pli qui passe par AC (ou respectivement BD), correspondent aux diagonales du carré.

Nous pouvons aussi appliquer (AO2) : « Un unique pli amène un point p_1 sur un point p_2 », en amenant le point B sur D (ou respectivement A sur C) et obtenir le même résultat.

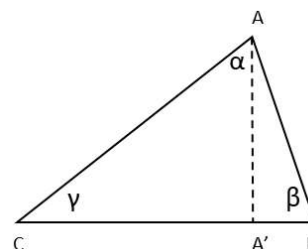
Il est aussi possible d'appliquer (AO3) : « Un pli superpose deux droites l_1 et l_2 ». En utilisant deux cotés adjacents nous pouvons arriver au même résultat.



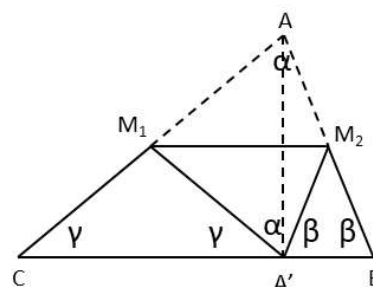
Avec l'intersection de ces deux plis diagonaux, nous obtenons un nouveau point p_0 qui correspond au centre du carré. La dimension des diagonales sera égale à racine de deux ($2^{1/2}$).

A. Démonstration de la somme des angles d'un triangle.

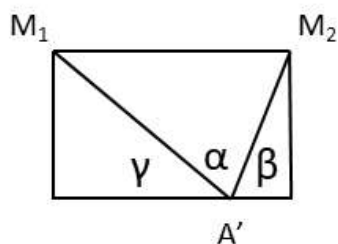
Nous partons maintenant d'une feuille triangulaire dont les sommets sont ABC et les angles α , β et γ respectivement.



1. Avec l'axiome 4 (AO4) : « Un unique pli passe par un point p_1 et est orthogonal à une droite l_2 ». Nous traçons le pli correspondant à la hauteur du triangle qui va du sommet A au côté opposé BC. Pour ceci nous ferons un pli qui passe par A et fait coïncider la droite BC avec elle-même. On obtient A' dans le côté BC. Les triangles AA'C et AA'B sont rectangles.
2. Avec (AO2) nous construisons le pli qui nous amène A sur A'. Ce pli définit M_1 , moitié du côté AC, et M_2 moitié du côté AB.



3. Les triangles $CA'M_1$ et $BA'M_2$ sont isocèles. Dans le point A' coïncident les angles α , β et γ , supplémentaires, dont la somme est de 180° .

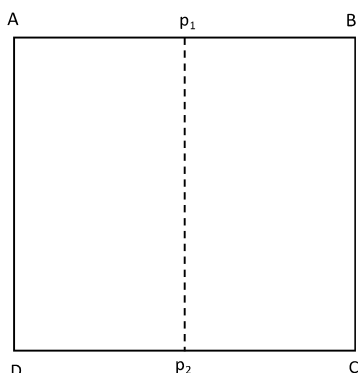


Notons qu'en pliant par les hauteurs des deux triangles isocèles, on obtient un rectangle dont l'aire est la moitié du triangle initial ; si nous acceptons que l'aire d'un rectangle est largeur fois longueur, alors nous pouvons démontrer que l'aire d'un triangle (S) est la moitié du produit de la base (B) par la hauteur (H) correspondante : $1/2S = 1/2B \times 1/2H$;

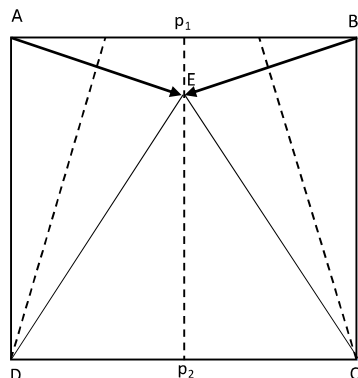
$$S = 1/2 B \times H.$$

B. Construction d'un triangle équilatéral à partir d'un carré (A, B, C, D) :

1. Tracer une médiatrice du carré (**AO2 ou AO3**), on obtient un pli qui définit p_1 (milieu du côté AB) et p_2 (milieu du côté CD).



2. Faire le pli qui passe par C et amène le sommet B vers la ligne p_1, p_2 (**AO5**). On obtient le point E dans le segment p_1p_2 . $CE = BC$

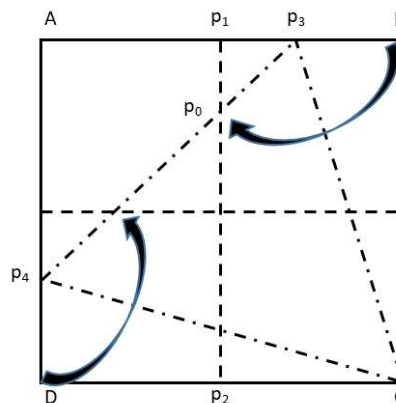


3. Faire le pli qui passe par D et amène A vers la ligne p_1, p_2 , il coïncide naturellement avec le point E et $DE = AD$.

4. Le triangle DCE est équilatéral avec coté égal au coté du carré. La hauteur de ce triangle est $(3/4)^{1/2}$ ou $3^{1/2}/2$, (racine de 3 divisé par deux).

Construire le triangle équilatéral inscrit dans le carré

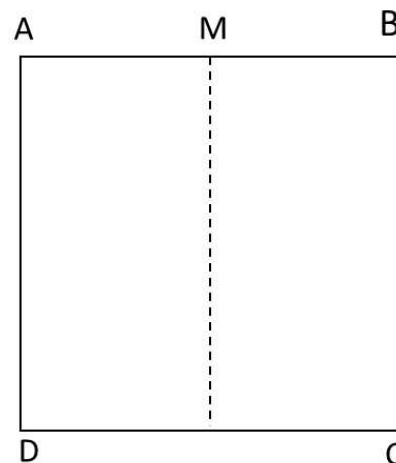
Dans le problème antérieur, le pli qui amène B dans le point E coupe AB dans p_3 . L'angle BCp_3 est de 15° $[(90-60)/2]$.



Traçons le pli de l'autre médiatrice du carré et traçons le pli symétrique que passe par C et nous amène D dans cette nouvelle médiatrice. Ce pli coupe AD dans p_4 . L'angle p_4Cp_3 est de 60° ; $Cp_4 = Cp_3$; et le triangle p_4Cp_3 est équilatéral, inscrit dans le carré. Ce triangle est maximal.

C. Théorèmes de Haga

Les théorèmes de Haga (2008) [20] sont intéressants du point de vue algébrique, géométrique et pédagogique.



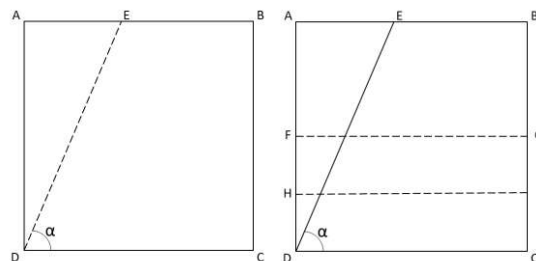
1. Construire avec un pli une médiatrice pour obtenir le point M , centre du côté AB (**AO2 ou AO3**).
2. Amener le sommet C au point M (**AO2**). Avec ce pli, on obtient Q dans l'intersection avec le côté BC et R dans le côté AD . $QC = QM$. Par ailleurs le côté DC , après pli, croise le côté AD dans le point P . Le

- $$(3/24+4/24+5/24) + (3/8+4/8+5/8) = (3/6 + 4/6+5/6)$$

D. *Trisection d'un angle aigu* [22].

L'axiome 6 (AO6) : « Soient deux droites l_1 et l_2 et deux points p_1 et p_2 ; un pli amène p_1 sur l_1 et p_2 sur l_2 » apporte des éléments de construction qui n'existent pas dans la géométrie euclidienne et permet de résoudre quelques problèmes dont Wanzel avait démontré l'impossibilité. Nous abordons ici le cas classique de la trisection d'un angle.

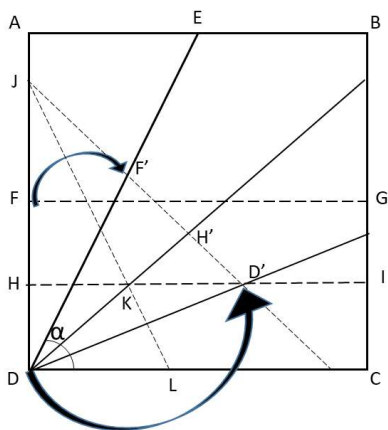
1. Traçons un pli quelconque qui passe par un des sommets du carré (D). Ce pli, avec le côté CD nous définit l'angle α que nous souhaitons diviser en trois parts égales. Ce pli coupe AB dans le point E .



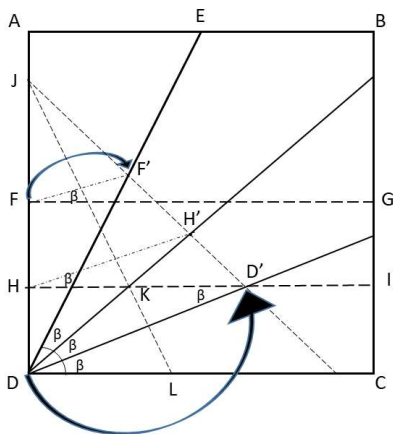
-
- The diagram shows a rectangular plate with vertices labeled A (top-left), B (top-right), C (bottom-right), and D (bottom-left). A diagonal crack is shown as a solid line from point E on the top edge AB to point D on the bottom-left corner. A horizontal crack is shown as a dashed line from point F on the left edge AD to point G on the right edge BC. The angle between the diagonal crack ED and the bottom edge DC is labeled α . A curved arrow indicates a counter-clockwise rotation of the plate around point D.

-

4. En appliquant **(AO6)** nous amenons le sommet D sur la ligne HI pour obtenir le point D' et le point F sur la ligne DE pour obtenir le point F' . La droite $F'D'$ coupe le coté AD dans le point J . Le pli ainsi obtenu (JL) est une bissectrice de l'angle DJD' . Ce pli coupe HI dans K et DC dans L . Le point H devient H' sur la ligne JD' .



5. Plions maintenant par DK et par DD' (**AO1**). Nous avons divisé l'angle α en trois parties $F'DH'$, $H'DD'$ et $D'DC$. Il nous reste à démontrer que ces angles sont égaux.



6. Démonstration : Le triangle $DD'K$ est isocèle, par symétrie ($DK=KD'$). Les angles $KD'D$ et KDD' sont égaux (β). Les angles $KD'D$ et $D'DC$ sont égaux (alternes-internes), donc $H'DD'=D'DC=(\beta)$. Par ailleurs $FH=HD=F'H'=H'D'$ et $F'DD'$ est isocèle avec hauteur $=DH'$, donc $F'DH'=H'DD'=(\beta)$ **C.Q.F.D.** (Il est possible utiliser aussi le parallélisme de $FF' \parallel HH' \parallel DD'$ et le triangle isocèle KHH').

IV. EXPERIMENTATION

A. Type de papier

Une première expérimentation a été effectuée pour chercher le type de papier le plus ergonomique pour la facilité d'accès aux pliages des personnes aveugles. Nous avons testé différents grammages (60, 80, 100, 120, 160 gr) mais aussi le type de papier (« sandwich » (deux papiers de soie collés à un papier métallisé), éléphant, vergé, double texture, etc.). Il semble que le plus adapté, au moins dans un premier temps (sans prendre en compte une possible adaptation par apprentissage), soit entre 120 et 160 gr/m², ce qui permet une meilleure facilité d'accès au marquage des plis et leurs intersections, sans trop limiter la facilité des pliages. Cependant ceci limite le nombre des plis et est en contradiction avec l'approche « théorique » qui serait celui d'un papier sans épaisseur... La taille du papier est aussi un facteur à prendre en compte. D'une manière générale, elle va dépendre de la superposition des plis et de la complexité du pliage à développer. Nous avons utilisé des

carrés 9x9cm et 21x21cm. Il est possible que, au moins dans un premier temps, dans un contexte pédagogique, un pré-marquage du papier facilite les pliages, en particulier s'ils sont complexes comme la trisection de l'angle.

B. Accessibilité et acceptation par des élèves aveugles.

(Le protocole prévu a été interrompu par la fermeture de l'INJA, suite aux mesures de confinement).

L'expérimentation comporte quelques séances de pliage avec des élèves (de la troisième à la terminale) et personnes aveugles pour étudier l'accessibilité à l'axiomatique de l'origami et à chacun des développements géométriques qui figurent dans ce document. A ce jour les constructions décrites montrent les résultats suivants :

D'une manière générale la progression des constructions évoquées semble très bien adaptée.

Les axiomes **AO1**, **AO2**, **AO3** ne posent pas de problème d'accessibilité s'il s'agit de cotés ou de points définis sur des cotés par une intersection avec un pli. **AO4** et **AO5** non plus si les droites impliquées sont exprimées sous forme de plis.

Ainsi :

La somme des angles d'un triangle ; la construction d'un triangle équilatère (dans ses deux versions) et le Théorème de Haga semblent bien accessibles.

Dans la trisection d'un angle : des problèmes pratiques sont apparus pour la mise en évidence tactile des points F' , D' et K de manière à faciliter les pliages par ces points. Il s'agit de détecter les points de projection sur une surface. Une possibilité est de formaliser les projections de droites avec des plis et de détecter les points d'intersection de ces plis ; une autre possibilité simple serait de travailler sur une surface molle (liège, silicone) qui permette de clouer des épingles, ou de marquer les points avec un embossage, pour permettre le repérage des points de projection. Mais la pratique doit permettre d'avancer assez rapidement.

V. CONCLUSION

Le pliage du papier ainsi que l'axiomatique récente qui est associée semblent être une bonne approche de la géométrie pour des personnes aveugles. L'accès par manipulation tactile du papier semble compatible avec le handicap en question. Nous avons constaté une petite difficulté initiale dans les applications des axiomes qui impliquent des intersections (projections) de points avec des droites (à l'intérieur du papier) ou droites sur les droites non pliées (**AO5**, **AO6**), mais nous avons remarqué des progrès rapides avec la pratique.

Par ailleurs la méthode peut être une incitation ludique dans un contexte de pédagogie inclusive, stimulant une communication entre les élèves aveugles et voyants.

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier Joséphine Lahmani pour sa relecture et vérification des notations (sans accès aux images !) et les élèves de l'INJA, qui étaient très motivés pour participer aux expérimentations, ainsi que à leurs professeurs de mathématiques Samuele Huyet-Blau, Amina Abaoui et Christine Enault.

REFERENCES

- [1] Vicente Palacios, «Historia de la pajarita». Ed. Salvatella. Barcelona 2008. 150pp.
- [2] P Wang-Iverson, Robert J. Lang, Mark Yim, «Origami 5 ; Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education» CRC Press, 2010, 643pp.
- [3] Miguel de Unamuno, «Apuntes para un tratado de cocotología» in Amor y Pedagogía. Imp. Henrich y Cia, Editores, Barcelona, 1902, 267 pp. Réédition : Ed Austral, Madrid, 1969.
- [4] Mouvement Français des Pliers de Papier. Association 1901. 56 rue Coriolis, Paris 75012.
- [5] S.Kase, «My Origami Teaching Method for the Physically Disabled (Including the Blind) and the Teacher's Attitude», Proceedings of COET91, Birmingham, 1991, pp. 242-247
- [6] M. Lucas, «Enseignement de l'origami - le projet Aveuglami », Le Valentin Haüy, n° 79, 3^e trimestre 2005, pp. 38-39
- [7] Robert J. Lang, «Origami desing secrets. Mathematical Methode for un Ancien Art», CRC Press, 2011, 758pp.
- [8] Tetsuya Gotani, « Origamix. Theory & Challenges », L'atelier du Grésivaudan, 2019, 192pp.
- [9] María Belén Garrido, « Orisangakus, Desafios matemáticos con papiroflexia », Real Soc. Matemática Española et SM. Madrid 2015, 144 pp.
- [10] Sue Pope and Tung Ken Lam « Origami and Learning Mathematics » pp 205,2 17 In « Origami 5 » [2]
- [11] Euclide d'Alexandrie, « Les Eléments » Vol 1, Livres I-IV, PUF, Paris 1990, 531pp.
- [12] Rober Geretschlager, « Geometric Origami » ; Arbelos Publishing, Shipley, UK 2008, 198pp.
- [13] Thomas Hull, « Projet Origami, activities for exploring mathematics ». CRC Press, NY, 2013.
- [14] Lewis Simon , Bennett Arnstein, Rona Gurkewitz, « Modular Origami Polyhedra », Revised and Enlarged Edition Paperback , 1999
- [15] Mind-Blowing, «Modular Origami: The Art of Polyhedral Paper Folding: Use Origami Math to fold Complex, Innovative Geometric», Origami Models Paperback, 2016
- [16] Humiaki Huzita. « Axiomatic development of origami geometry ». In Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, 1989, pp 143–158.
- [17] Jesús de la Peña Hernandez, «Matemáticas y papiroflexia». AEP, Madrid 2001, 257pp.
- [18] Ce pli n'est pas forcément unique, en particulier si l'intersection des deux droites est dans le papier. En effet, deux segment d'une meme droite peuvent définir deux plis différentes (deux bisectrices).
- [19] Jacques Justin, «Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques», Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, Humiaki Huzita, ed., 1989, pp. 251-261. (1986). «Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques» (PDF). L'Ouvret - Journal de l'APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg (in French). 42: 9–19.
- [20] Kazuo Haga. « Origamics . Mathematical Explorations through Paper Folding », World Scientific Publisshing, 2008.
- [21] “Le Monde” n°23392 du 25 mars 2020, p 24. Solution dans le n°du 1^{er} avril 2020, p 24.
- [22] Hisashi Abe (1980), in Jacques Justin « The Mathematics of Origami », British Origami, 108 (1984), 9.
- [23] M. L. Wantzel (1837). «Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas». Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1 (2): pp. 366-372.
https://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_Wantzel (avril 2020)
- [24] Koji Fusimi, «Trisection of angle by Abe» Saiensu supplement, October, 1980, p. 8. (Non vérifié).
https://debat.pagesperso-orange.fr/histoire/trisection_angle.html#ch1 (avril 2020)
- [25] Jacques Justin, «Triseccion Angulo Obtus» described in British Origami, no. 107, pp. 14–15, 1984.