

Expérimentation Géorigamétrie

Accessibilité de la géométrie

pour les personnes aveugles au travers du pliage

Protocoles expérimentaux

Jaime López Krahe

THIM-CHArt (UR-4004), Université Paris 8

Mathieu Gaborit

Grhapes (UR-7287), INSEI

Service des documents adaptés aux personnes déficientes visuelles, INSEI

Introduction

L'accessibilité de la géométrie pour les personnes aveugles, hors l'aspect formel, peut poser quelques difficultés, en particulier au niveau de l'accessibilité aux figures. Nous avons proposé une approche pratique à partir du pliage du papier (López Krahe, 2020a ; López Krahe, 2020b). L'axiomatique euclidienne et l'axiomatique de l'origami peuvent être mises en parallèle. Dans le premier cas, avec la règle et le compas, nous pouvons résoudre des problèmes quadratiques dans le plan. L'axiomatique de l'origami nous permet d'aborder, en plus, des questions sans solution avec les méthodes de géométrie classique, qui impliquent des équations cubiques, comme la trisection d'un angle. À la suite de l'avis positif du comité d'éthique (Comité d'éthique du lab Chart, 2005), nous avons commencé une expérimentation avec des élèves et d'autres personnes aveugles, qui nous a permis d'établir la faisabilité et les possibilités offertes par cette méthode qui permet une approche ludique et rigoureuse de l'accès à l'axiomatique. Ce sujet semble éveiller un intérêt important récent (López Krahe, 2020b), et nous l'avons constaté aussi chez les sujets de notre expérimentation.

Nous proposons ici un protocole qui est rédigé d'une manière linéaire accessible aux personnes aveugles, les images ne sont pas nécessaires, mais peuvent être une aide pour les personnes voyantes.

Le protocole expérimental inclut une introduction et 4 items. Les premières expériences nous ont conduits à développer quelques stratégies pour faciliter l'accessibilité tactile aux pliages.

Un tutoriel vidéo, en libre accès, pourra être consulté aussi ici :

<https://www.insei.fr/ressources/recherche> de manière à faciliter l'accès pédagogique à ces démonstrations pour les enseignants et les personnes aveugles qui le souhaitent.

Mots-clés : Accessibilité de la Géométrie. Pédagogie pour aveugles. Axiomatique et pliage du papier. Créativité tactile. Origami

Rappel axiomatique

En géométrie classique, ce sont les principes de l'axiomatique euclidienne (Euclide d'Alexandrie, 1990), bien connue, qui permettent un développement cohérent de la science. Nous considérons connues les notions de point, droite, plan, angle, polygone, congruence, etc. En acceptant et en s'appuyant sur ces postulats, il est possible de démontrer des théorèmes (par exemple Pythagore) et de construire une science exacte. Nous sommes habitués à y accéder à partir de figures qui facilitent la compréhension des éléments correspondants, mais celles-ci ne sont pas strictement nécessaires.

Nous rappelons ici les cinq postulats de base :

- **Axiome 1** (AE1) : un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts.
- **Axiome 2** (AE2) : un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
- **Axiome 3** (AE3) : étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre du cercle.
- **Axiome 4** (AE4) : tous les angles droits sont congruents.
- **Axiome 5** (AE5) : si deux lignes sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est strictement inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté. (Ou postulat des parallèles, dans la version de Proclus : « *par un point donné, on peut mener une et une seule parallèle à une droite donnée* »).

En particulier la remise en question de ce dernier postulat donne lieu aux géométries non euclidiennes à partir du XIX^e siècle.

Axiomatique de l'origami

Depuis la fin du XX^e siècle, nous assistons à un développement théorique des techniques du pliage avec une approche mathématique. Ces travaux sont assez divers : géométriques (Geretschläger, 2008), algébriques (Hull, 2013), topologiques, géométrie de l'espace (Simon *et al.*, 1999 ; Mind-Blowing, 2016), etc. Nous aborderons ici les domaines plus proches de la géométrie qui nous semblent les plus innovants pour l'accessibilité aux personnes aveugles.

Rappelons les axiomes de l'origami de Huzita-Justin ou Huzita-Hatori (Huzita, 1989 ; Peña Hernandez, 2001) :

- Axiome 1 (AO1)** : Un unique pli passe par deux points p_1 et p_2 spécifiés.
- Axiome 2 (AO2)** : Un unique pli amène un point p_1 sur un point p_2 .

c. **Axiome 3 (AO3)** : Un pli superpose deux droites l_1 et l_2 .

Ce pli n'est pas forcément unique, en particulier si l'intersection des deux droites est dans le papier. En effet, deux segments d'une même droite peuvent définir deux plis différents (deux bissectrices).

d. **Axiome 4 (AO4)** : Un unique pli passe par un point p_1 et est orthogonal à une droite l_2 .

e. **Axiome 5 (AO5)** : Soient une droite l_1 et deux points p_1 et p_2 . Lorsque c'est possible, un pli passe par p_2 et amène p_1 sur l_1 .

f. **Axiome 6 (AO6)** : Soient deux droites l_1 et l_2 et deux points p_1 et p_2 ; Lors que c'est possible, un pli amène p_1 sur l_1 et p_2 sur l_2 .

g. Il existe un septième axiome (**AO7**), énoncé par Jacques Justin en 1989 : « Étant donné un point p et deux lignes l_1 et l_2 , il existe un pli unique qui fait coïncider le point p avec l_1 et est perpendiculaire à l_2 » (Justin, 1989).

Il est possible de trouver un parallélisme des cinq premiers axiomes avec l'axiomatique euclidienne, voire des facilités de construction, (par exemple **(AO3)** nous permet de construire des bissectrices sans avoir à accéder au sommet d'un angle), mais les constructions dérivées de l'axiome 6 (**AO6**) ne sont pas possibles avec règle et compas (sauf cas particuliers). Ce postulat va nous permettre la résolution d'équations de troisième degré, démontré par J. Justin en 1989 ou résoudre des problèmes comme la trisection d'un angle (Justin, 1984).

Protocole expérimentale

Nous abordons ici quelques exemples à visée pédagogique qui seront mis en pratique lors de notre expérimentation.

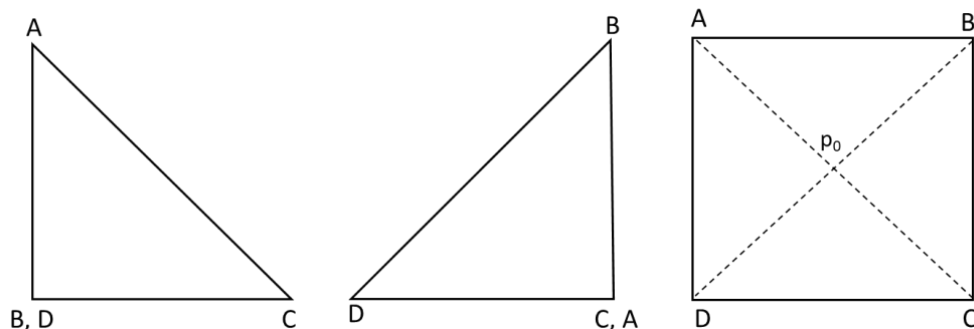
Les expérimentations effectuées nous ont permis de constater l'accessibilité à partir des descriptions formelles. Cependant, d'un point de vue pratique, il peut y avoir des stratégies qui facilitent l'accessibilité tactile à des points ou intersections pour aider dans les opérations de pliages, comme nous le verrons par la suite.

Le protocole expérimental a consisté en une introduction et 4 items conçus pour des élèves à partir de la classe de quatrième, bien que les trois premiers aient été aussi expérimentés avec des élèves de 6^e et 5^e. La démonstration du théorème de Pythagore, en principe est accessible à partir de la 4^e.

Un cinquième item est prévu pour l'expérimentation pour des élèves de 1^{re} et terminal, il s'agit de la trisection d'un angle (Abe, in Justin, 1984), décrit dans (López Krahe, 2020a ; López Krahe, 2020b), malheureusement nous n'avons pas pu encore trouver des élèves pour effectuer les expériences. L'axiome **AO6**, peut poser des difficultés spécifiques pour des personnes aveugles.

Introduction

Une première phase d'introduction présente la notion des postulats euclidiens pour continuer avec les axiomes de l'origami. Nous partons d'une feuille carrée.



Nous disposons de quatre points, les quatre sommets du carré, nommés A , B , C , D , dans le sens des aiguilles d'une montre.

Ceci nous permet de faire vérifier 3 axiomes (**AO1**, **AO2**, **AO3**).

Appliquons le premier axiome (**AO1**) : « *Un unique pli passe par deux points p_1 et p_2 spécifiés* ».

Considérons deux sommets opposés A et C (ou B et D). Le pli qui passe par AC (ou respectivement BD), correspond à une diagonale du carré.

Nous pouvons aussi appliquer (**AO2**) : « *Un unique pli amène un point p_1 sur un point p_2* », en amenant deux sommets opposés, le point A sur C (ou B sur D) et obtenir le même résultat.

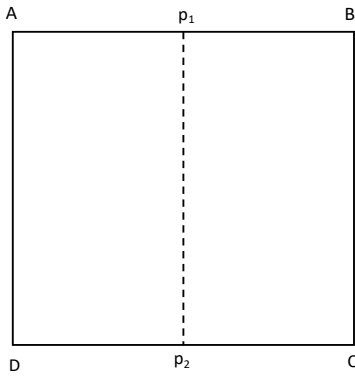
Il est aussi possible d'appliquer (**AO3**) : « *Un pli superpose deux droites l_1 et l_2* ». En utilisant deux côtés adjacents nous pouvons arriver au même résultat en amenant le côté AB sur le côté AD , le pli ainsi créé correspond à la diagonale AC .

Notons qu'avec l'intersection de deux plis diagonaux, nous obtenons un nouveau point p_0 qui correspond au centre du carré.

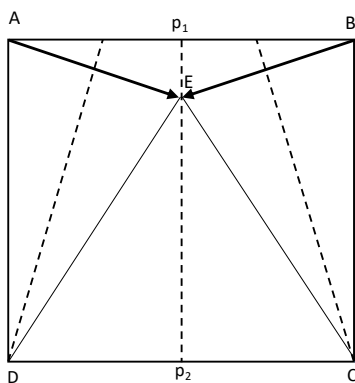
Item 1 : faire un triangle équilatéral de côté égal au côté du carré

Nous avons utilisé des feuilles carrées de 15 cm de côté et de grammage 80 et suivi le protocole suivant :

Tracer une médiatrice du carré (**AO2** ou **AO3**), on obtient un pli qui définit p_1 (milieu du côté $[AB]$) et p_2 (milieu du côté $[CD]$).



Faire le pli qui passe par C et amène le sommet B vers la ligne p_1, p_2 (**A05**). On obtient le point E dans le segment $[p_1p_2]$. $CE = BC$



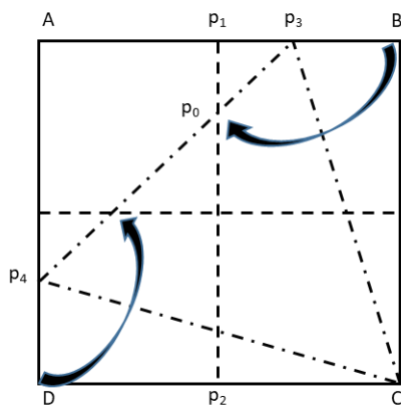
Faire le pli qui passe par D et amène A vers la ligne p_1, p_2 , il coïncide naturellement avec le point E . $DE = AD$.

Le triangle CDE est équilatéral avec coté égal au côté du carré.

Stratégie de pliage : pour faciliter le pliage (**A05**) nous proposons de conserver le pli de la médiatrice, ceci facilite l'accessibilité de p_1, p_2 pour effectuer les deux plis qui constituent les côtés $[CE]$ et $[DE]$ du triangle équilatéral.

Item 2 : construire un triangle équilatéral maximal inscrit dans un carré

Dans le problème antérieur, le pli qui amène B sur le point E , coupe AB en p_3 . L'angle BCp_3 est de 15° $[(90-60)/2]$.

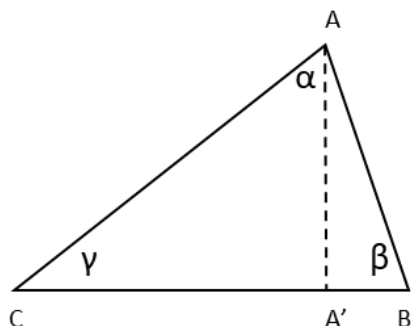


Tracer le pli de l'autre médiatrice du carré et tracer le pli symétrique qui passe par C et amène D dans cette nouvelle médiatrice (**A05**). Ce pli coupe AD en p_4 . L'angle p_4Cp_3 est de 60° ; $Cp_4=Cp_3$; et le triangle p_4Cp_3 est équilatéral, inscrit dans le carré (vous pouvez effectuer le pli p_3 , p_4 pour mieux le percevoir). Ce triangle est maximal.

Stratégie de pliage : La stratégie de pliage proposé en *Item 1* peut être appliquée ici.

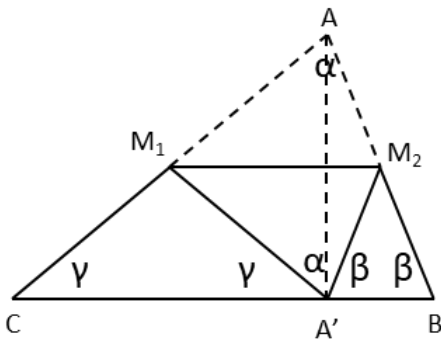
Item 3 : démonstration de la somme des angles d'un triangle

Nous partons maintenant d'une feuille triangulaire dont les sommets sont ABC et les angles respectivement α , β et γ . Un rectangle de $21 \times 8,7$ cm a été coupé en deux par la diagonale pour obtenir deux triangles rectangles.



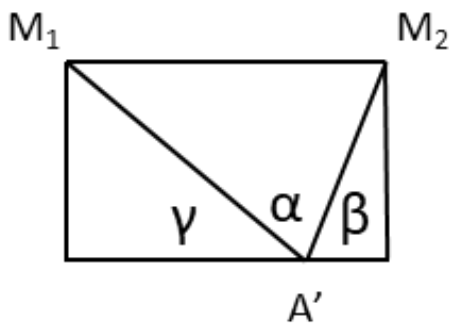
Avec l'axiome 4 (**A04**) : « Un unique pli passe par un point p_1 et est orthogonal à une droite l_2 ».

Tracer le pli correspondant à la hauteur du triangle issue de l'angle droit A (elle est donc perpendiculaire au côté BC .) Pour ceci faire un pli qui passe par A et fait coïncider la droite BC avec elle-même. On obtient A' dans le côté BC . Les triangles $AA'C$ et $AA'B$ sont rectangles en A' .



Avec **(AO2) construire** le pli qui nous amène A sur A'. Ce pli définit M_1 , milieu de [AC], et M_2 milieu de [AB].

Les triangles $CA'M_1$ et $BA'M_2$ sont isocèles. Dans le point A' coïncident les angles α , β et γ , supplémentaires, dont la somme est de 180° .



Notons qu'en pliant par les hauteurs des deux triangles isocèles, on obtient un rectangle dont l'aire est la moitié du triangle initial ; si nous acceptons que l'aire d'un rectangle soit largeur x longueur, alors nous pouvons démontrer que l'aire d'un triangle (S) est la moitié du produit de la base (B) par la hauteur (H) correspondante : $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}B \times \frac{1}{2}H$;

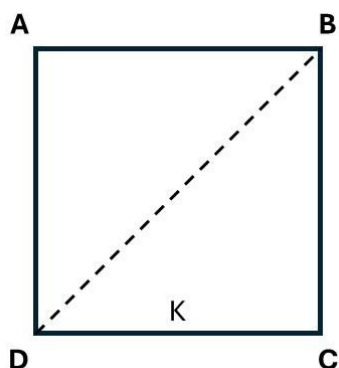
$$S = \frac{1}{2} B \times H.$$

Item 4 : démonstration du Théorème de Pythagore

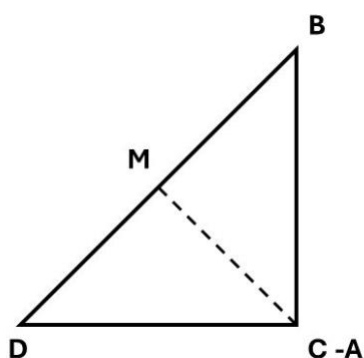
(Effectué avec des feuilles carrées de 21 x 21 cm découpés d'une feuille A4 80 gr. Dans un premier temps nous avons testé des feuilles de 120 gr. Avec l'hypothèse d'une meilleure accessibilité des intersections, mais l'épaisseur et la répétition des pliages, cumulait des imprécisions importantes).

Prenons une feuille carrée de sommets ABCD

a. Effectuer un pli par la diagonale BD. Nous pouvons appliquer **AO1** (un pli qui passe par BD), ou bien **AO2** (amener A sur C), ou **AO3** en superposant AB sur BC ou AD sur DC. Nous obtenons le triangle C/A, B, D.

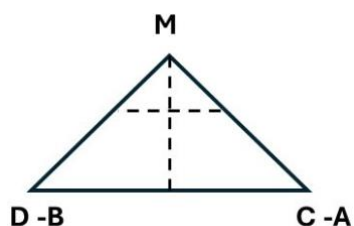


b. Replier le triangle obtenu en deux. **AO2** (amener B sur D) ou **AO3** superposer le segment B, C/A sur D, C/A. On obtient le triangle D/B, M, C/A, M étant le centre du carré.

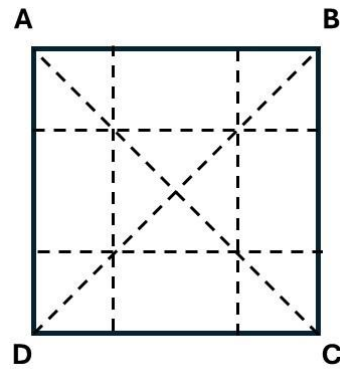
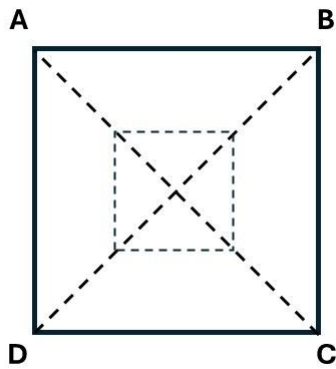


c. Dans le triangle obtenu, plier sur la hauteur issue de M : application de **AO4**.

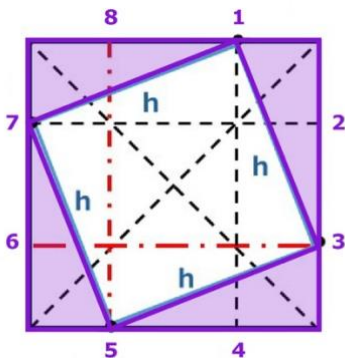
d. Tracer un pli parallèle au côté D/B, C/A. Pour ceci, ramener le sommet M sur un point quelconque de la hauteur issue de M. Accentuer bien ce pli.



e. Déplier le papier pour observer le pli d'un carré centré à l'intérieur du papier. Faire quatre plis de prolongation des côtés de ce carré pour obtenir deux intersections dans chaque côté du carré. Nous pouvons nommer dans l'ordre T1 et T2 sur AB, T3 et T4, sur BC, T5 et T6 sur CD et T7 et T8 sur DA.

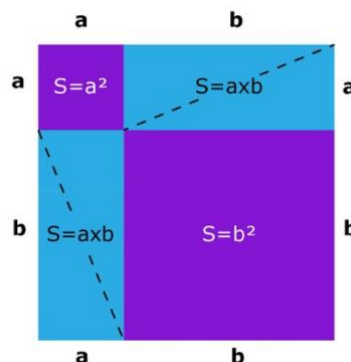
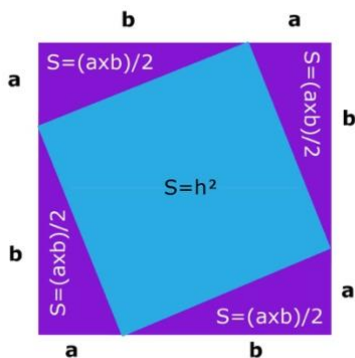


f. Plier en reliant deux intersections alternées de cotés adjacents **(AO1)** : T1-T3 ; T3-T5 ; T5-T7 ; T7-T1, de manière à obtenir 4 triangles rectangles égaux dont les angles droits correspondent aux quatre sommets, soient, A, B, C et D de la feuille carrée. Ces triangles ont trois côtés de longueur « a », « b » et une hypoténuse « h ». En maintenant pliés ces 4 triangles, nous obtenons un carré de côté h. Observons que le côté de la feuille $k = a + b$.



g. La surface S de la feuille peut se décomposer :

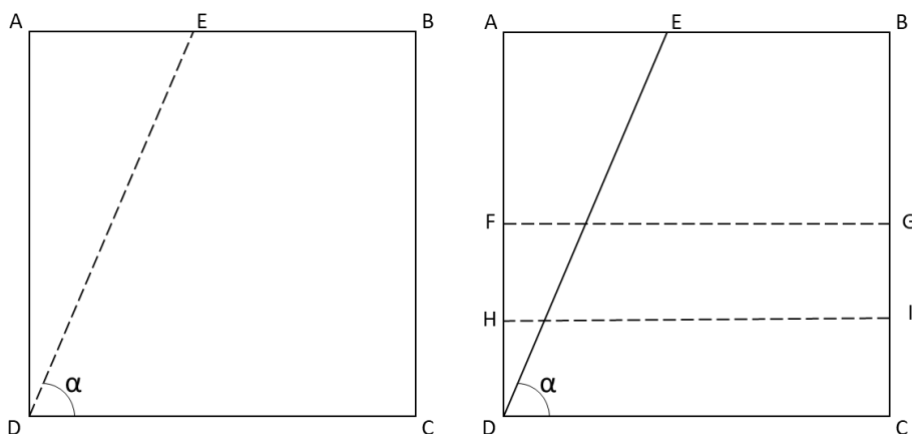
- Dans un carré de côté h plus 4 triangles rectangles de côtés a, b et h. Donc nous avons $S = h^2 + 4 \frac{ab}{2} = h^2 + 2ab$
- Dans deux carrés, un de côté a, et un autre de côté b, plus deux rectangles axb . Donc $S = a^2 + b^2 + 2ab$;
- (aussi, si $k = a + b$; $S = k^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$)
- Donc $h^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$ et donc $h^2 = a^2 + b^2$; C.Q.F.D.



Stratégie de pliage : la présente stratégie permet de faciliter les pliages du point des intersections alternées T1-T3, etc. : S'il y a des difficultés pour percevoir les intersections et effectuer les pliages des triangles, il est possible de procéder ainsi : refaire un pli en montagne [se dit du pli saillant, par opposition au pli en vallée, en creux, sur le revers de la feuille] d'un des côtés du carré intérieur des prolongations, exemple : T8-T3. Refaire un autre pli en montagne d'un autre côté adjacent du même carré, exemple T2-T5. Nous obtenons un rectangle de côtés a, b ; en pliant la diagonale, nous obtenons le premier triangle rectangle évoqué dans le point f). Il est possible de répéter la procédure pour les trois autres triangles.

Item 5 : trisection d'un angle

Il s'agit d'un des problèmes classiques de la Grèce Antique (comme la quadrature du cercle ou la duplication du cube). Après des tentatives inutiles pendant plus de deux mille ans et des millions d'heures de lutte pour trouver une solution à ces problèmes, le théorème de Pierre-Laurent Wantzel démontre en 1837 que ceci est impossible (sauf cas particulier) avec règle et compas.



L'axiome 6 (A06) : « Soient deux droites l_1 et l_2 ; et deux points p_1 et p_2 ; un pli amène p_1 sur l_1 et p_2 sur l_2 » apporte des éléments de construction qui n'existent pas dans la géométrie euclidienne et permet de résoudre quelques problèmes dont Wantzel avait démontré l'impossibilité. Nous abordons ici le cas classique de la trisection d'un angle.

Cette construction pour des angles aigus est due à Hisashi Abe (in Justin, 1984). Une solution par pliage pour les angles obtus a été aussi proposée par Jacques Justin en 1984 (Justin, 1984).

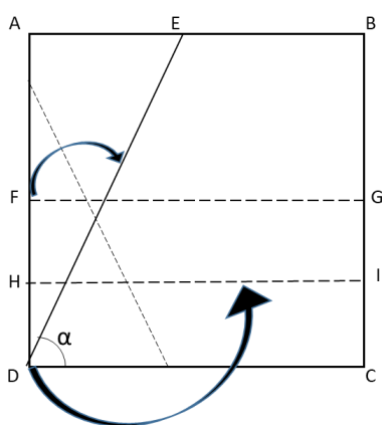
Nous partons, comme dans les cas précédents d'une feuille carrée ($ABCD$). Dans ce cas nous utilisons une feuille 21 x 21 de 120 gr. Le nombre de pliages cumulés étant faible, la détection tactile des intersections est possible. L'utilisation d'un poinçon peut également faciliter les pliages qui utilisent des intersections à l'intérieur de la feuille.

Cet item est plus complexe que les items antérieurs. Il nous semble important de l'expérimenter avec des élèves de filières scientifiques, avec une motivation suffisante pour le mener à bien. Par ailleurs, le temps nécessaire pour réaliser cet item est très supérieur aux items précédents. La compréhension de la démonstration aussi. Pour surmonter les difficultés pratiques, il est possible d'effectuer un pré-plier pour lever les difficultés liées à la manipulation et permettre aux élèves de se concentrer sur les aspects géométriques (Bruner, 1983).

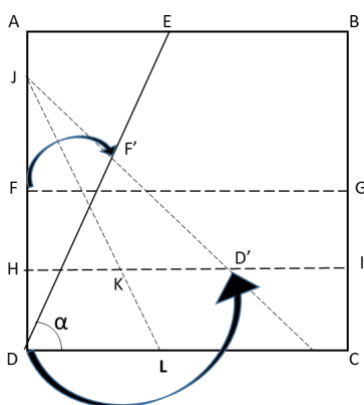
Par ailleurs, cet item peut, dans le cadre d'une scolarisation inclusive, permettre l'apport d'une nouvelle approche scientifique stimulante.

Le processus est le suivant :

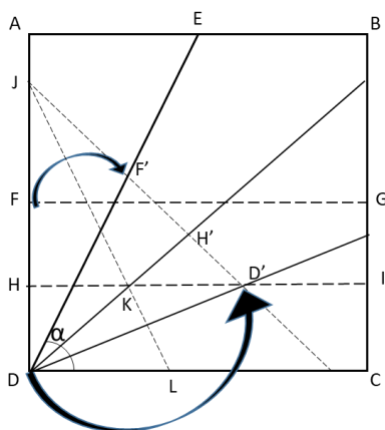
- a) Tracer un pli quelconque qui passe par un des sommets du carré (D). Ce pli, avec le coté CD définit l'angle α à diviser en trois parts égales. Ce pli coupe AB en E .



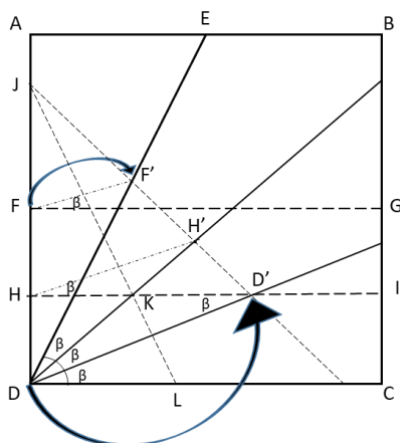
- b) Tracer un pli parallèle à CD (de préférence égal ou au-dessus de la médiatrice pour faciliter les pliages). Nous obtenons deux intersections, le point F appartient au côté AD et le point G au côté BC .



c) Amener le coté CD sur la ligne FG , (**AO3**). Le point H appartient à AD et le point I à BC . Par construction on obtient : $FH = HD = GI = IC$.



d) Amener le sommet D sur la ligne HI (**AO6**) et le point F sur la ligne DE . On obtient D' et F' sur la ligne DE . La droite $F'D'$ coupe AD en J . Le pli ainsi obtenu (JL) est une bissectrice de l'angle DJD' . JL coupe HI en K et DC en L . Le point H devient H' sur la ligne JD' .



e) Plier par DK et par DD' (**AO1**). Nous avons divisé l'angle α en trois parties $F'DH'$, $H'DD'$ et $D'DC$. Il reste à démontrer que ces angles sont égaux.

Démonstration : Le triangle $DD'K$ est isocèle. Par symétrie, $DK = KD'$. Les angles $KD'D$ et KDD' sont égaux (β). Les angles $KD'D$ et $D'DC$ sont égaux car alternes-internes. Donc $H'DD' = D'DC = (\beta)$. Par ailleurs $FH = HD = F'H' = H'D'$ et $F'DD'$ est isocèle avec pour hauteur $= DH'$. Donc $F'DH' = H'DD' = (\beta)$. C.Q.F.D. (Il est également possible d'utiliser le parallélisme de $FF' \parallel HH' \parallel DD'$ et le triangle isocèle KHH').

Références

Abe, H. (1984). In J. Justin, The Mathematics of Origami, *British Origami*, 108, 9.

Avis du comité d'éthique du lab Chart (EA 4004) n° #2005_3.

- Bruner, J. S. (1983). Le rôle de l'interaction de tutelle dans la résolution de problème. *Le développement de l'enfant. Savoir faire, savoir dire* (pp. 261-280). Presses universitaires de France.
- Euclide d'Alexandrie. (1990). *Les Éléments*. Vol. 1, Livres I-IV, PUF.
- Geretschläger, R. (2008). *Geometric Origami*. Arbelos Publishing, Shipley.
- Hull, T. (2013). *Projet Origami, activities for exploring mathematics*. CRC Press.
- Humiaki, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry ». *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology* (pp 143-158).
- Justin, J. (1984). Triseccion Angulo Obtus. Described in *British Origami*, 107, 14-15.
- Justin, J. (1989). Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, H. Humiaki (ed.), (pp. 251-261).
- López Krahe, J., (2020). « Géorigamétrie ». *Actes Handicap 2020*, Paris, 4, 6 novembre 2020, THIM-CHART (UR-4004), Université Paris 8. p. 151-156. https://ifraith.fr/handicap2020/wp-content/uploads/sites/10/2020/11/proceedings_handicap2020
- Lopez Krahe, J. (2020). "GeOrigametry". An Approach to the Accessibility of Geometry for Blind People. *AMSE, IIETA, Modelling, Measurement and Control C*, 81(1-4), 67-71.
- Peña Hernandez, J. de la (2001). *Matemáticas y papiroflexia*. AEP.
- Mind-Blowing (2016). *Modular Origami: The Art of Polyhedral Paper Folding: Use Origami Math to fold Complex, Innovative Geometric*. Origami Models Paperback.
- Prakash, S., Sujathamalini, J., & Gunasekaran, K. (2025). Study on teaching strategies for geometry concepts for students with visual impairment: A review. *International Journal of Research in Special Education*, 5(1), 83-90.
- Simon, L., Arnstein, B., Gurkewitz, R. (1999). *Modular Origami Polyhedra*. Revised and Enlarged Edition Paperback.
- Wantzel, M. L. (1837). Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1(2), 366-372. https://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_Wantzel (janvier 2026).